【Q_{01}　（2021/12/14）】

相反定理の釣合系と適合系の幾何学的境界が同じである必要はない理由があまり理解できていません.

【A01　（2022/01/04）】

Q の「釣合系と適合系の幾何学的境界条件が同じ... 」は，「実系 1 の幾何学的境界条件と実系 2 の幾何学的境界条件が同じである必要はない」とのことだとして回答します．質問の趣旨は例えば，系 1 は単純ばりで，系 2 は片持ち梁の場合でも相反定理式が成立する理由が理解できないと理解しました.

相反定理の証明・誘導は下図 1 のように，①釣合系 1 と適合系 2 のダイバージェンスの定理式，②釣合系 2 と適合系 1 のダイバージェンスの定理式を記述し，線形弾性体なら，ダイバージェンスの定理式において内力のなす仕事が①と②で等しいことより，①の外力のなす仕事と②の外力のなす仕事が等しいという説明をしました．したがって，相反定理において実系 1 の幾何学的境界条件と実系 2 の幾何学的境界条件が同じである必要はないことは，ダイバージェンスの定理が，異なる幾何学的境界条件をもつ実系 1 と実系 2 で成り立つことを示せば良いこととなります．図 2 はダイバージェンスの定理について示していますが，ダイバージェンスの定理において，適合系は釣合系による外力，断面力によるたわみやひずみでなくて良いことを示しています．さらには釣合系は外力と断面力が釣合ってさえいれば良く，幾何学的境界条件に制約はありません.

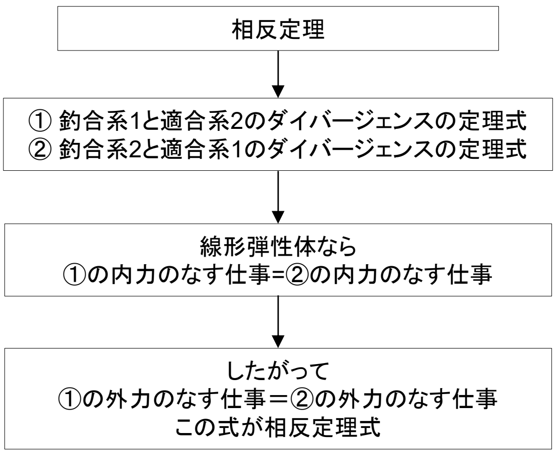

図 1　相反定理の証明の手順

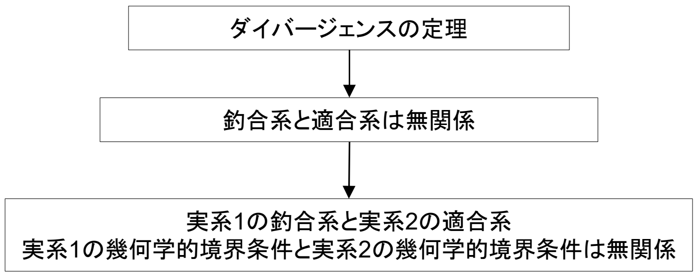

図 2　ダイバージェンスの定理

実系 1 の釣合系 1 の外力 1 と実系 2 の適合系 2 のたわみ 2 を図 3 のように描きます．実系 1 の外力 1 は，ここには図は示していませんが，断面力 1（M^*）と釣合っている必要があります．また，実系 1 の外力 1 より生じるたわみ 1 と実系 2 のたわみ 2 を生じさせる外力 2 は示していません．この時，ダイバージェンスの定理式は，動画③ダイバージェンスの定理のスライド 8 で示したように，下式(1)となります.

$$Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x) v(x) dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x) dx \qquad (1)$$

上式の釣合系は外力 1 と断面力 1 が釣合っていればよく，式(1)は釣合系はどんな幾何学的境界条件であっても成立します．例えば，実系 1 が単純ばりでの釣合系で，実系 2 が片持ちばりの適合系でも成り立ちます．このように，ダイバージェンスの定理は実系 1 と実系 2 の幾何学的境界条件が異なる場合でも成立します．したがって，相反定理において，系 1 と系 2 の幾何学的境界条件は異なっていても良いこととなります．ただし，相反定理式において釣合系

の反力が仕事をする場合には，きちんとその仕事を記述する必要があります．系 1 と系 2 の幾何学的境界条件が同じ場合には，反力は仕事をしないので，外力だけを考えて相反定理式を記述すれば良いこととなります．

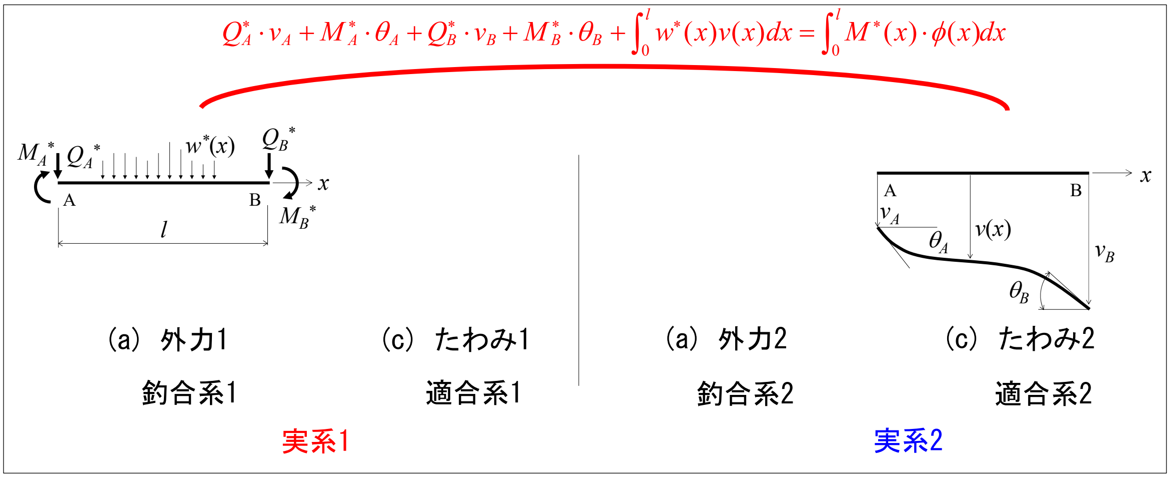

図 3　外力 1 とたわみ 2 （たわみ 2 は外力 1 によるものである必要はない）

例えば，図 3 の実系 1 の外力は，支点も含めて書いてやると図 4 の釣合系(a)から(d)の場合が考えられます．4 つの図を描いていますが，赤色で示している反力を含めれば全て同じ外力の状態です．これら実系 1 の 4 つの外力に対してダイバージェンスの定理式を記述すれば，4 つの釣合系に関してすべて式(1)となります（実系 2 の適合系は同じものを用いています）．図 4 中の赤字の反力は，黒字で示す外力から境界条件に従って得られるもので，4 つの図の反力はそれぞれ異なり，また式(1)右辺で示す断面力 M^*も異なりますが，ダイバージェンスの定理式としては同じ式(1)となります．

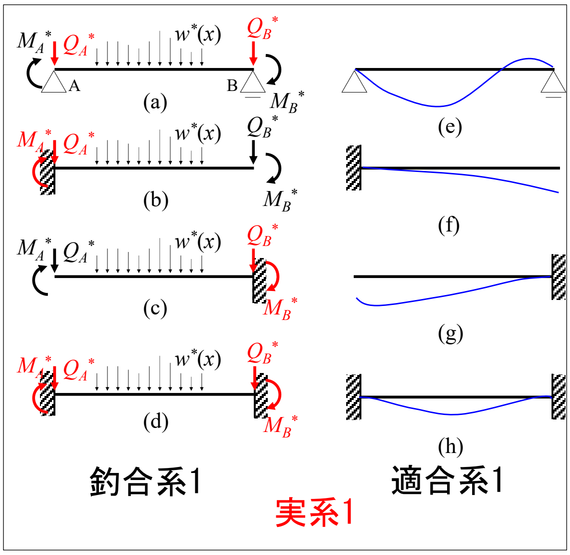

図 4　 種々の幾何学的境界条件を持つ実系 1

動画④ダイバージェンスの定理（例題）の例題 4（スライド 8）に幾何学的境界条件が異なる場合に成り立つ例を示しているので参考にしてください．また，動画⑤単位仮想荷重法の具体的例 5（スライド 8）にも適合系と幾何学的境界条件が異なる単位 1 を作用させる釣合系を用いた単位仮想荷重法によってたわみを求める例を示しています．

【補足】

相反定理は下図 5 のような実系 1 と実系 2 に対して，①実系 1 の外力 1 が実系 2 のたわみ 2 に対してなす仕事と，②実系 2 の外力 2 が実系 1 のたわみ 1 に対してなす仕事が等しいことを主張します．式で書くと，下式(2)となります．

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a \tag{2}$$

この式(2)は，実系 1 の釣合系と実系 2 の適合系に対するダイバージェンスの定理式(3)と，実系 2 の釣合系と実系 1 の適合系に対するダイバージェンスの定理式(4)において，線形弾性体であれば式(3)と(4)の右辺が等しいことより得られました．

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = \int_l M_a \phi_b \tag{3}$$

$$P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a = \int_l M_b \phi_a \tag{4}$$

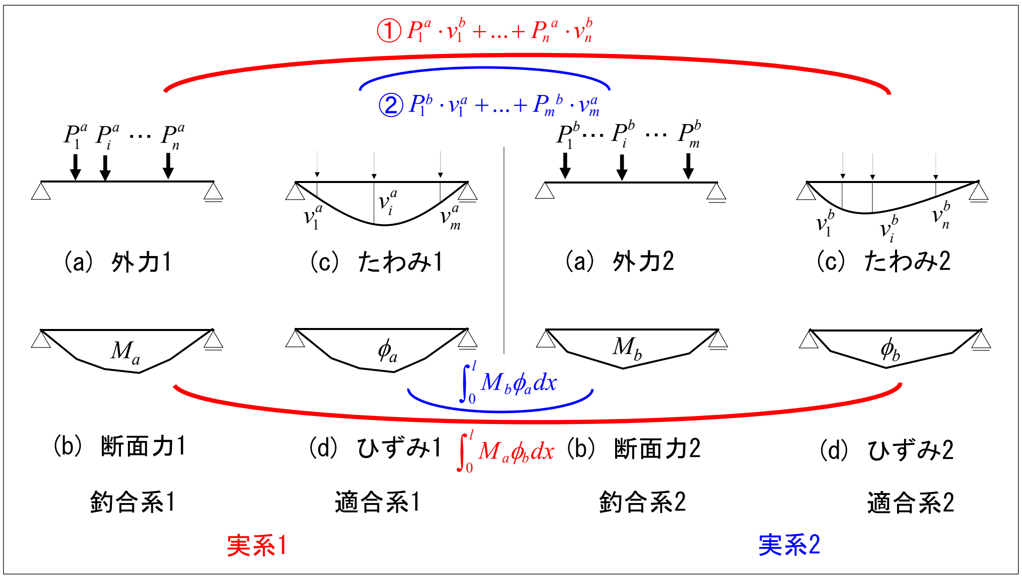

図 5　系 1 と系 2 の幾何学的境界条件が等しい場合

図 5 では，実系 1 と実系 2 の幾何学的境界条件は左端でピン，右端でローラと同じです．

図 5 の実系 2 を左端が固定の片持ちばりとした場合のダイバージェンスの定理式は式(3),(4)に対応させると，それぞれ式(5)，(6)となります．

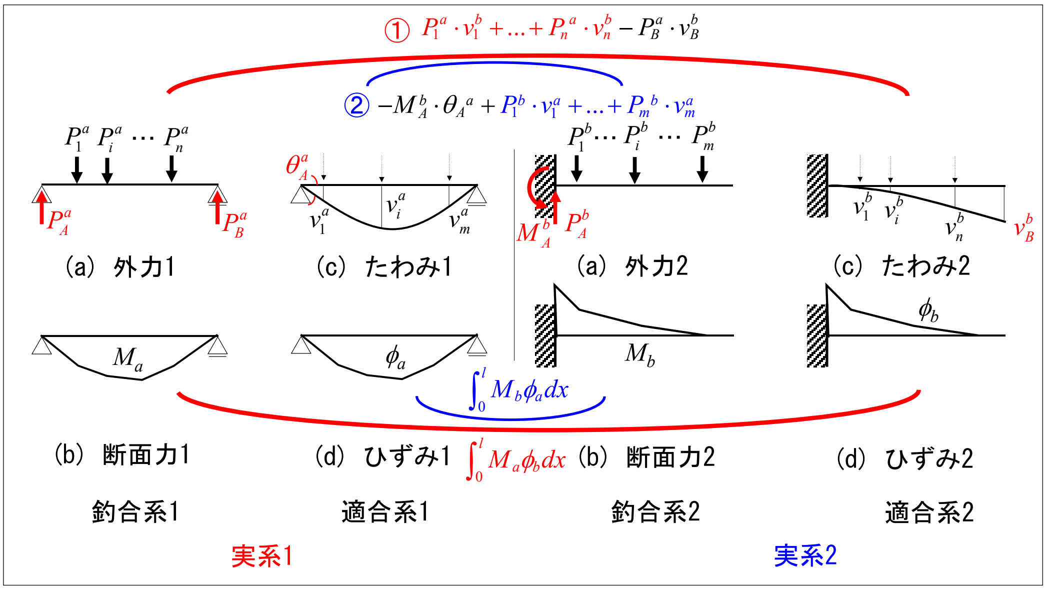

図 6　系 1 と系 2 の幾何学的境界条件が異なる場合

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n{}^a \cdot v_n^b - P_B^a \cdot v_B^b = \int_l M_a \phi_b \tag{5}$$

$$-M_A^b \cdot \theta_A{}^a + P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m{}^b \cdot v_m^a = \int_l M_b \phi_a \tag{6}$$

式(5)右辺の $-P_B^a \cdot v_B^b$ は外力 1 の図に示す反力 P_B^a がたわみ 2 の図に示す v_B^b に対してなす仕事です．式(6)右辺の $-M_A^b \cdot \theta_A{}^a$ は外力 2 の反力 M_A^b がたわみ 1 の $\theta_A{}^a$ に対してなす仕事です．なお，マイナス記号が付いているのは力の方向と変位の方向が反対のためです.

式(5)と(6)の右辺の内力のなす仕事は線形弾性体であれば等しいので，結局この場合の相反定理式は下式(7)となります.

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n{}^a \cdot v_n^b - P_B^a \cdot v_B^b = -M_A^b \cdot \theta_A{}^a + P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m{}^b \cdot v_m^a \tag{7}$$

このように，幾何学的境界条件が異なる時は，反力が仕事をする場合はその仕事を考慮すれば相反定理はなり立ちます.